

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 9-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor *)**

Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c \leq 4$ și $ab + bc + ca \geq 4$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$.

b) Arătați că sunt adevărate cel puțin două dintre inegalitățile

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$	6
a) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 16 - 2 \cdot 4 = 8$	6
b) $ a - b ^2 + b - c ^2 + c - a ^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$	5
$ a - b ^2 + b - c ^2 + c - a ^2 \leq 8$, deci cel puțin doi termeni ai sumei inițiale sunt ≤ 4 .	5,5

Problema 2 (*, S.G.M 11/2025)**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deoarece membrul stâng este număr întreg, trebuie ca și membrul drept să fie număr întreg.	5
Rezultă $[x] = 0$ sau $[x] = 2$	5
Pentru $[x] = 0$ ecuația devine $\left[\frac{1}{1-x} \right] = 1$, echivalent cu $1 \leq \frac{1}{1-x} < 2$.	3
Aceasta se reduce la $\frac{1}{2} < 1-x \leq 1$, iar mulțimea soluțiilor din acest caz este $\left[0, \frac{1}{2} \right)$.	3
Pentru $[x] = 2$ ecuația devine $\left[\frac{1}{1-x} \right] = -1$, echivalent cu $-1 \leq \frac{1}{1-x} < 0$.	3
Aceasta se reduce la $1-x \leq -1$ iar mulțimea soluțiilor din acest caz este $[2, 3)$.	3
În concluzie, mulțimea tuturor soluțiilor este $\left[0, \frac{1}{2} \right) \cup [2, 3)$	0,5

Problema 3 (autor ***)

Considerăm predicatul $P(k, n): k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1$, unde n și k sunt numere naturale, $k \geq 1$.

a) Arătați că propoziția $P(3, 1)$ este adevărată, iar propoziția $P(3, 2)$ este falsă.

b) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „pentru orice număr natural $k \geq 1$ există un număr natural n astfel încât propoziția $P(k, n)$ să fie falsă”.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$3(\sqrt{2} - \sqrt{1}) = \sqrt{18} - 3 > 1$, deoarece $\sqrt{18} > 4$	7
$3(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{27} - \sqrt{18} < 1$, deoarece $\sqrt{27} < 5,2$ și $\sqrt{18} > 4,2$	7
$k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$	5
Pentru $n = k^2$ ultima inegalitate este falsă, deci propoziția $P(k, n)$ este falsă. Ca atare, propoziția la care se referă enunțul este adevărată (pentru orice număr natural $k \geq 1$ există numărul natural $n = k^2$)	3,5

Problema 4 (autor ***)

Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC la BC , AC , respectiv AB .

a) Arătați că, dacă notăm cu p semiperimetrul triunghiului, atunci

$$a\overrightarrow{AD} = (p-c)\overrightarrow{AB} + (p-b)\overrightarrow{AC}.$$

b) Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Știm că $BD = p - b$, $CD = p - c$.	5
Apoi $\overrightarrow{AD} = \frac{CD}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC}\overrightarrow{AC}$, de unde reiese cerința	5
b) Cu relația de la punctul a), dacă $a = b = c = 2x$, atunci $p = 3x$ și $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$	6
Reciproc, dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, folosind punctul a) și exprimând totul în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ obținem $\left(\frac{p-c}{a} + \frac{p-a}{c} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{p-b}{a} + \frac{p-a}{b} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0},$ deci parantezele sunt nule.	4
Aceasta se reduce la $a^2 + c^2 - ab - bc = 0$ și $a^2 + b^2 - bc - ac = 0$. Prin scăderea acestor relații obținem $(b-c)(a+b+c) = 0$, de unde $b = c$. Înlocuind aceasta într-una din relațiile precedente obținem $a = b$, deci $a = b = c$.	2,5

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 11-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor *)**

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 3I_3 - A$ și $M_x = \frac{x}{3}B + \frac{1}{3x^2}A$, unde x este

un număr real nenul.

a) Arătați că $B^2 = 3B$.

b) Arătați că $M_x \cdot M_y = M_{xy}$, pentru orice numere reale nenule x, y .

c) Arătați că $\det(M_x) \neq 0$, pentru orice număr real nenul x .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $A^2 = 3A$, deci $B^2 = 9I_3 - 3A = 3B$,	6
b) Observăm că $AB = BA = O_3$. Rezultă astfel că $M_x M_y = \frac{xy}{9} B^2 + \frac{1}{9x^2 y^2} A^2 = \frac{xy}{3} B + \frac{1}{3(xy)^2} A = M_{xy}$	10,5
c) Observăm că $M_x \cdot M_{\frac{1}{x}} = M_1 = I_3$, deci M_x este inversabilă, oricare ar fi $x \neq 0$, ceea ce arată că $\det(M_x) \neq 0$, oricare ar fi $x \neq 0$. <i>Soluție alternativă.</i> Avem $M_x = \begin{pmatrix} x+k & k & k \\ k & x+k & k \\ k & k & x+k \end{pmatrix}$, unde $k = \frac{1}{3x^2} - \frac{x}{3}$. Atunci $\det(M_x) = (x+k)^3 + 2k^3 - 3k^2(x+k) = x^3 + 3x^2k = x^3 + x^2\left(\frac{1}{x^2} - x\right) = 1$, pentru orice $x \neq 0$	6

Problema 2 (autor *, S.G.M 11/2025)**

Arătați că relația de recurență $a_0 \in [0,1]$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definește un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și studiați limita acestuia.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru ca șirul să fie corect definit trebuie să verificăm că $a_n - a_n^2 \geq 0$, adică $a_n \in [0,1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce iese imediat cu un raționament inductiv	5

Dacă $a_0 = 0$ atunci $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, iar dacă $a_0 = 1$ atunci $a_1 = a_2 = \dots = 0$, deci $a_n \rightarrow 0$ în aceste cazuri	4
Dacă $0 < a_0 < 1$, atunci $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ și, inductiv, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \geq 1$	5
În acest ultim caz $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$, deci șirul este crescător	5
Rezultă $a_n \rightarrow \ell > 0$, $\ell = \sqrt{1 - \ell^2}$, $\ell = \frac{1}{2}$.	3,5

Problema 3 (autor ***)

Fie n un număr natural nenul și A o matrice $n \times n$ inversabilă, cu elemente numere reale și care verifică relația $A + A^{-1} = I_n$.

- Demonstrați că $A^3 = -I_n$.
- Arătați că n este un număr par.
- Determinați $\det(A + I_n)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Din ipoteză obținem $A^2 - A + I_n = O_n$, de unde $A^3 = -I_n$	6
b) Avem $4A^2 - 4A + I_n = -3I_n$, apoi $(\det(2A - I_n))^2 = (-3)^n$, deci n este par	6
c) Din punctul precedent $(\det A)^3 = (-1)^n = 1$ și, deoarece $\det A$ este număr real, reiese $\det A = 1$	3
Din ipoteză $(A + I_n)^2 = 3A$, deci $(\det(A + I_n))^2 = 3^n \det A = 3^n$	4
Cum $\det(A + I_n) = \det(A^2 + 2I_n) = \det(A + i\sqrt{2}I_n) \det(A - i\sqrt{2}I_n) \geq 0$ ca produs de două numere complexe conjugate, reiese $\det(A + I_n) = 3^{n/2}$	3,5

Problema 4 (autor ***)

a) Arătați că, dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ există, atunci această limită este nulă.

b) Dați exemplu de funcție periodică $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$ nu există. Justificați răspunsul!

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $T > 0$ o perioadă a funcției și ℓ valoarea limitei din enunț. Considerăm șirul $x_n = nT, n \in \mathbb{N}^*$; avem $x_n \rightarrow \infty$. Atunci: pe de o parte $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow \ell$, iar pe de altă parte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este constant (egal cu $f(0)$), deci $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow 0$, de unde	10

$\ell = 0$.	
b) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 - \{x\}}$; ea are perioada 1.	2,5
Pentru șirul $x_n = n, n \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; pentru șirul $y_n = n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{f(y_n)}{y_n} = \frac{n}{n - \frac{1}{n}} \rightarrow 1$, deci limita nu există.	10

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 10-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor Mihaela Berindeanu, G.M. 6-7-8/2025)

Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,
pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $x = y = 1$ obținem $f(1)^2 - f(1) = 2$ și cum $f(1) > 0$, rezultă $f(1) = 2$.	10p
Pentru $x \in (0, \infty)$ și $y = 1$ avem $2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}$, deci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, funcție care verifică proprietatea din enunț.	12,5p

Problema 2 (autor Flavian Georgescu)

Determinați perechile (x, y) de numere reale cu $x, y \in [20, 26]$ astfel încât
 $\max \left\{ (46x - 520)^{\log_y 45}, (46y - 520)^{\log_x 45} \right\} \leq 2025$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
(x, y) soluție $\Rightarrow (y, x)$ soluție, deci putem presupune $x \leq y$. $(y - 20)(y - 26) \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq 46y - 520 \Rightarrow y^{2\log_x 45} \leq (46y - 520)^{\log_x 45} \leq 2025$ (*)	8p
Obținem $45^{2\log_x y} \leq 45^2$, deci $\log_x y \leq 1$, de unde $y \leq x$, în consecință, $x = y$.	6,5p
Cum inegalitățile din (*) devin egalități, obținem $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025$ Avem: $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025 \Leftrightarrow 45^{\log_x (46x - 520)} = 45^2 \Leftrightarrow \log_x (46x - 520) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 = 46x - 520 \Leftrightarrow x \in \{20, 26\}$. Obținem perechile $(20, 20)$ și $(26, 26)$, care verifică.	8p

Problema 3 (autor Alina Paraschiv)

Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere complexe nenule și $a \geq 2$ un număr real cu proprietatea că $\log_a(|z_n|)$ este număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie P mulțimea submulțimilor finite și nevide ale lui $\mathbb{N}$ și funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: P \rightarrow \mathbb{C}$ cu $f(n) = \log_a(|z_n|)$ și $g(X) = \sum_{i \in X} z_i$.

Arătați că, dacă f e injectivă, atunci g e injectivă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $X, Y \in P$ cu $g(X) = g(Y)$. Presupunem $X \neq Y$, deci $X \Delta Y \neq \emptyset$, unde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Fie $k = f(j) = \max\{f(i), i \in X \Delta Y\}$. Din injectivitatea lui f, j e unic și presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $j \in X$. După eventuala reducere a termenilor cu indicii în $X \cap Y$, egalitatea $g(X) = g(Y)$ devine $z_j = \sum_{i \in Y \setminus X} z_i - \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i$ (*) ($\sum_{i \in T} z_i = 0$, dacă $T = \emptyset$)	7p
Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} = \emptyset$, atunci $z_j = 0$, fals. Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} \neq \emptyset$, atunci $k \geq 1$, și din (*) obținem $z_j \leq \left \sum_{i \in Y \setminus X} z_i \right + \left \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i \right \leq \sum_{i \in (X \Delta Y) \setminus \{j\}} z_i$	7p
Din injectivitatea lui f și $a \geq 2$ rezultă $a^k \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \leq a^k - 1$, fals, deci $X = Y$ și g e injectivă.	8,5p

Problema 4 (autor Flavian Georgescu)

Determinați numerele complexe a, b, c, d care au, simultan, proprietățile:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 1, \quad a + b + c + d = 2\sqrt{3} \quad \text{și} \quad a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cum cele patru numere au toate modulul egal cu 1 și $a^3 + b^3 = (-c)^3 + (-d)^3$, rezultă ca $a^3, b^3, (-c)^3$ și $(-d)^3$ sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi (eventual degenerat) înscris în cercul unitate.	5p
După o eventuală redenumire, rezultă $a^3 = -b^3$ și $c^3 = -d^3$. Dacă $a = -b$ obținem $2\sqrt{3} = c + d \leq c + d = 2$, fals, deci $a \neq -b$ și, analog, $c \neq -d$.	5p

După o eventuală redenumire, rezultă $a = b\varepsilon$ și $c = d\varepsilon$, unde $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Atunci $2\sqrt{3} = b\varepsilon + b + d\varepsilon + d = (1+\varepsilon)(b+d)$, deci $b+d = \sqrt{3}-i$	6p
Cum $ b+d = \sqrt{3}-i = 2 = b + d $ și $ b = d =1$, obținem $b = d = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, în consecință, $a = c = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.	6p
Deci două dintre numere sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ și două sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.	0,5p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 12-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor Ștefania Constantinescu)

Se consideră un grup $(G, \cdot)$ și $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow G$ morfisme de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ în grupul $(G, \cdot)$, cu proprietatea că există două numere întregi a și b , prime între ele, astfel încât $f(a) = g(a)$ și $f(b) = g(b)$. Arătați că $f = g$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(kt) = f(t)^k$ și $g(kt) = g(t)^k$, pentru orice numere întregi k și t .	10p
Există numerele întregi p și q cu $pa + qb = 1$, deci $kpa + kqb = k$, pentru orice număr întreg k .	2,5p
$f(k) = f(kpa + kqb) = f(kpa) \cdot f(kqb) = f(a)^{kp} \cdot f(b)^{kq} = g(a)^{kp} \cdot g(b)^{kq} = g(kpa) \cdot g(kqb) = g(kpa + kqb) = g(k)$, pentru orice întreg k , deci $f = g$.	10p

Problema 2 (autor Florin Rotaru, G.M. 6-7-8/2025)

a) Fie $0 \leq a < b$ și o funcție derivabilă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$.

Arătați că există $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$.

b) Dați un exemplu de funcție derivabilă $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1)$

și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Considerăm funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (a + b - x)f(x) + \int_a^x f(t) dt$. Cum $g(b) = af(b) + \int_a^b f(t) dt = af(b) + bf(a) - af(b) = bf(a) = g(a)$ și g este derivabilă, din teorema lui Rolle rezultă că există $c \in (a, b)$ cu $g'(c) = 0$.	11p

Cum $g'(x) = (a+b-x)f'(x)$, atunci $(a+b-c)f'(c) = 0$. Dar $c < b \leq a+b$, deci $f'(c) = 0$.	1,5p
b) Fie $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Avem $\int_{-1}^1 x dx = 0 = f(-1) + f(1)$ și $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [-1,1]$.	10p

Problema 3 (autor Marian Andronache)

Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu cel puțin două elemente. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$, unde e este elementul neutru al monoidului.
b) $(M, \cdot)$ este grup.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $k \geq 2$ numărul elementelor lui M . $b) \Rightarrow a)$ Cum $(M, \cdot)$ este grup, rezultă că $a^k = e$, oricare ar fi $a \in M$, deci $a^k \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$.	10p
$a) \Rightarrow b)$ Fie $a \in M$. Cum două din elementele $a, a^2, a^3, \dots, a^k, a^{k+1}$ sunt egale, există $p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $a^p = a^{p+q}$, și, inductiv, prin înmulțire cu a^q , rezultă că $a^p = a^{p+rq}$, oricare ar fi $r \in \mathbb{N}$. Alegem r astfel încât $rq > p$. Prin înmulțirea ultimei egalități cu a^{rq-p} obținem $a^{rq} = a^{2rq}$.	10p
Fie $b = a^{rq}$. Cum $b^2 = b$, rezultă $b^n = b$, deci $b = e$. Din $a^{rq} = e$ deducem că a este simetrizabil, deci $(M, \cdot)$ este grup.	2,5p

Problema 4 (autor Marian Andronache)

Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset [1, \infty)$ și șirul $(a_n)_{n \geq 2}$,

cu $a_n = \frac{1}{\ln n} \int_1^n \frac{f(x)}{x} dx$. Știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din lema lui Stolz-Cesaro, este suficient să calculăm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx$	3p

Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta_\varepsilon > 1$ astfel încât $1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$. Fie $n > \delta_\varepsilon$. Cum $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in [n, n+1]$, prin integrare de la n la $n+1$ obținem $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n) \leq \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n)$	15p
Cum $1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$, pentru orice $n \geq [\delta_\varepsilon] + 1$, rezultă că $L = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	4,5p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ, 13.02.2026
CLASA a VIII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 22,5 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor Bănescu Magdalena)

a) Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive și orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc

inegalitatea: $\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} \geq 4(ab)^n$.

b) Aflați numerele reale, strict pozitive, a și b pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{1+a^{2026}}{b} + \frac{1+b^{2026}}{a} = 4(ab)^{506}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} = \left(\frac{1}{b} + \frac{b^{4n+2}}{a}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a^{4n+2}}{b}\right)$	5p
Aplicăm inegalitatea mediilor pentru fiecare paranteză și obținem: $\left(\frac{1}{b} + \frac{b^{4n+2}}{a}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a^{4n+2}}{b}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{b^{4n+1}}{a}} + \sqrt{\frac{a^{4n+1}}{b}}\right)$	5p
$\sqrt{\frac{b^{4n+1}}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^{4n+1}}{b}} = \sqrt{a^{4n} \cdot b^{4n}} = a^{2n} \cdot b^{2n}$	4p
Finalizare $\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} \geq 4(ab)^n$.	3p
Folosim a) pentru $n = 506$ și obținem egalitatea: $\begin{cases} b^{2027} = a \\ a^{2027} = b \end{cases} \Rightarrow b^{2027^2} = b$	4p
Justificare $b = 1 \Rightarrow a = 1$.	1,5p

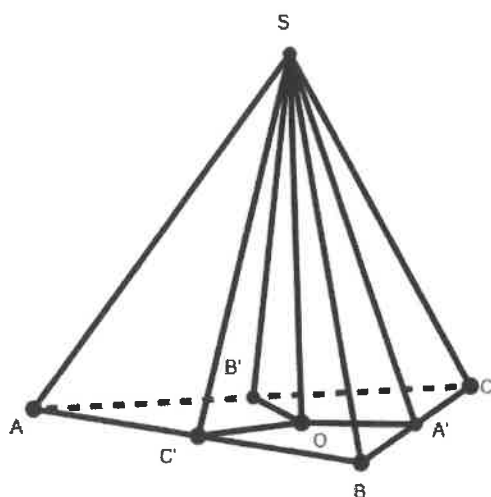
Problema 2 (autor Liliana Niculescu, G.M. 9/2025, supliment)
Aflați perechile de numere întregi pentru care este verificată relația $x(x+1) = y(y+7)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x^2 + x = y^2 + 7y \mid \cdot 4$ $4x^2 + 4x = 4y^2 + 28y$	2p
$4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 28y + 49 - 48$ $(2x+1)^2 = (2y+7)^2 - 48$ $(2y+7)^2 - (2x+1)^2 = 48$	2p
$(2y+7-2x-1)(2y+7+2x+1) = 48$ $(2y-2x+6)(2y+2x+8) = 48$ $4(y-x+3)(y+x+4) = 12$	5p
$y-x+3, y+x+4$ au parități diferite. $\begin{cases} y-x+3=a \\ y+x+4=b \end{cases} \quad a \cdot b = 12, a, b \text{ de parități diferite.}$ $2y+7 = a+b \Rightarrow y = \frac{a+b-7}{2}, x = \frac{b-a-1}{2}$	4,5p
$(a, b) \in \{(-12, -1), (-1, -12), (-4, -3), (-3, -4), (12, 1), (1, 12), (4, 3), (3, 4)\}$	2p
$(x, y) = \{(5, -10), (-6, -10), (0, -7), (-1, -7), (-6, 3), (5, 3), (-1, 0), (0, 0)\}$	7p

Problema 3 (autor Livia Harabagiu)

În piramida triunghiulară $SABC$, fie A', B', C' proiecțiile vârfului piramidei pe laturile BC, AC , respectiv AB ale triunghiului ABC . Se știe că $SA' \equiv SB' \equiv SC'$.

- Arătați că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.
- Fie O piciorul perpendicularei duse din S pe planul (ABC) , O în interiorul triunghiului ABC . Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , arătați că piramida $SABC$ este regulată.



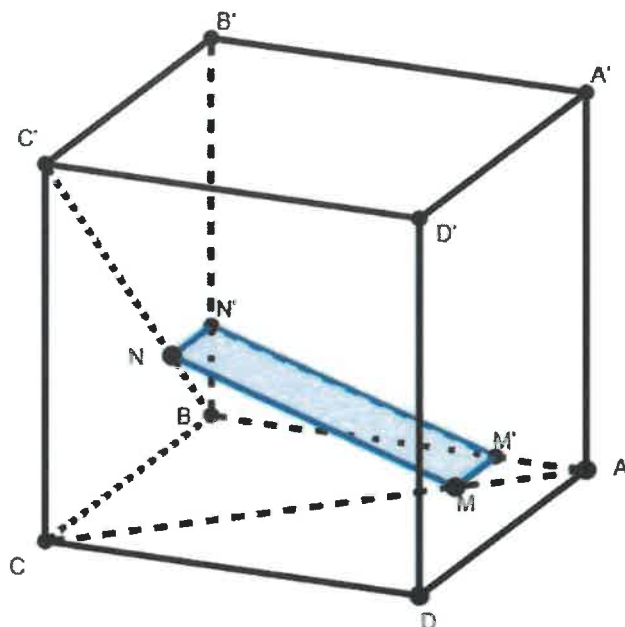
Detalii rezolvare	Barem asociat
$\left. \begin{array}{l} SI \perp (ABC), I \in (ABC) \\ \text{a) Fie } SA' \perp BC \\ IA', BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} R.T.3\perp \\ \Rightarrow IA' \perp BC. \end{array}$ Analogue, $IB' \perp AC, IC' \perp AB$ (1) $\left. \begin{array}{l} SI \perp (ABC) \\ IA', IB', IC' \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp IA', SI \perp IB', SI \perp IC'$	3p
Comparăm $\triangle SIA'$ cu $\triangle SIB'$ și cu $\triangle SIC'$ și conform cazului I.C. $\Rightarrow \triangle SIA' \cong \triangle SIB' \cong \triangle SIC' \Rightarrow IA' \equiv IB' \equiv IC' \text{ (2)}$	3p
Din (1) și (2) $\Rightarrow d(I; AB) = d(I; BC) = d(I; AC)$ rezultă I este centrul cercului înscris $\triangle ABC \Rightarrow A'B \equiv C'B, A'C \equiv B'C, AC' \equiv AB'$ $\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \stackrel{R.T. Ceva}{=} 1 \Rightarrow AA', BB', CC' \text{ sunt concurente.}$	6p
$\left. \begin{array}{l} \text{Din (a)} \Rightarrow O = I \\ \text{b) } O \text{ centrul cercului înscris în } \triangle ABC \\ O \text{ centrul cercului circumscris } \triangle ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ este echilateral. (3)}$	3p
A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC, AB.	3p
SC' mediană și înălțime în $\triangle SAB \Rightarrow \triangle SAB$ isoscel cu baza $AB \Rightarrow SA \equiv SB$ (4). SA' mediană și înălțime în $\triangle SBC \Rightarrow \triangle SBC$ isoscel cu baza $BC \Rightarrow SB \equiv SC$ (5). Din (4) și (5) $\Rightarrow SA \equiv SB \equiv SC$ (6).	2,5p
Din (3) și (6) $\Rightarrow SABC$ este piramidă triunghiulară regulată.	2p

Problema 4 (autor Traian Preda)

Fie $ABCA'B'C'D'$ un cub și punctele $M \in (AC), N \in (BC')$ astfel încât

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC'} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

- Demonstrați că $MN \parallel (ABB')$.
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele MN și AA' .
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele MN și CD' .



Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Alegem $M' \in (AB)$ și $N' \in (BB')$ astfel încât $MM' \parallel BC$ și $NN' \parallel B'C'$.	1p
Din T.F.A. obținem $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC'} = \frac{NN'}{BC'} \Rightarrow MM' \equiv NN'$,	2p
Dar $MM' \parallel NN' \Rightarrow MNN'M'$ paralelogram $\Rightarrow$	2p
$MN \parallel M'N'$, dar $M'N' \subset (ABB') \Rightarrow MN \parallel (ABB')$.	3p
b) Notăm $AB = l \Rightarrow BN' = \frac{(\sqrt{3}-1)l}{2}$	2p
$BN' = AM' \Rightarrow M'B = l - \frac{\sqrt{3}-1}{2}l = \frac{3-\sqrt{3}}{2}l$	2p

$MN \parallel MN', AA' \parallel BB' \Rightarrow \sphericalangle(MN, AA') = \sphericalangle(M'N', BB') = \sphericalangle BN'M'$	2p
$\operatorname{tg} \sphericalangle BN'M' = \frac{M'B}{N'B} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$	2p
$\sphericalangle BN'M' = 60^\circ.$	2p
c) $MN \parallel MN', CD' \parallel BA' \Rightarrow$ $\sphericalangle(MN, CD') = \sphericalangle(M'N', A'B) = \sphericalangle BPN'$ Unde am notat cu P intersecția dreptelor $M'N'$ și $A'B$.	2,5p
Întrucât $\sphericalangle PN'B = 60^\circ, \sphericalangle PBN' = 45^\circ \Rightarrow$ $\sphericalangle BPN' = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$	2p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 9-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor *)**

Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c \leq 4$ și $ab + bc + ca \geq 4$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$.

b) Arătați că sunt adevărate cel puțin două dintre inegalitățile

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$	6
a) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 16 - 2 \cdot 4 = 8$	6
b) $ a - b ^2 + b - c ^2 + c - a ^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$	5
$ a - b ^2 + b - c ^2 + c - a ^2 \leq 8$, deci cel puțin doi termeni ai sumei inițiale sunt ≤ 4 .	5,5

Problema 2 (*, S.G.M 11/2025)**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deoarece membrul stâng este număr întreg, trebuie ca și membrul drept să fie număr întreg.	5
Rezultă $[x] = 0$ sau $[x] = 2$	5
Pentru $[x] = 0$ ecuația devine $\left[\frac{1}{1-x} \right] = 1$, echivalent cu $1 \leq \frac{1}{1-x} < 2$.	3
Aceasta se reduce la $\frac{1}{2} < 1-x \leq 1$, iar mulțimea soluțiilor din acest caz este $\left[0, \frac{1}{2} \right)$.	3
Pentru $[x] = 2$ ecuația devine $\left[\frac{1}{1-x} \right] = -1$, echivalent cu $-1 \leq \frac{1}{1-x} < 0$.	3
Aceasta se reduce la $1-x \leq -1$ iar mulțimea soluțiilor din acest caz este $[2, 3)$.	3
În concluzie, mulțimea tuturor soluțiilor este $\left[0, \frac{1}{2} \right) \cup [2, 3)$	0,5

Problema 3 (autor ***)

Considerăm predicatul $P(k, n): k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1$, unde n și k sunt numere naturale, $k \geq 1$.

a) Arătați că propoziția $P(3, 1)$ este adevărată, iar propoziția $P(3, 2)$ este falsă.

b) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „pentru orice număr natural $k \geq 1$ există un număr natural n astfel încât propoziția $P(k, n)$ să fie falsă”.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$3(\sqrt{2} - \sqrt{1}) = \sqrt{18} - 3 > 1$, deoarece $\sqrt{18} > 4$	7
$3(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{27} - \sqrt{18} < 1$, deoarece $\sqrt{27} < 5,2$ și $\sqrt{18} > 4,2$	7
$k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$	5
Pentru $n = k^2$ ultima inegalitate este falsă, deci propoziția $P(k, n)$ este falsă. Ca atare, propoziția la care se referă enunțul este adevărată (pentru orice număr natural $k \geq 1$ există numărul natural $n = k^2$)	3,5

Problema 4 (autor ***)

Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC la BC , AC , respectiv AB .

a) Arătați că, dacă notăm cu p semiperimetrul triunghiului, atunci

$$a\overrightarrow{AD} = (p-c)\overrightarrow{AB} + (p-b)\overrightarrow{AC}.$$

b) Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Știm că $BD = p - b$, $CD = p - c$.	5
Apoi $\overrightarrow{AD} = \frac{CD}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC}\overrightarrow{AC}$, de unde reiese cerința	5
b) Cu relația de la punctul a), dacă $a = b = c = 2x$, atunci $p = 3x$ și $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$	6
Reciproc, dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, folosind punctul a) și exprimând totul în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ obținem $\left(\frac{p-c}{a} + \frac{p-a}{c} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{p-b}{a} + \frac{p-a}{b} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0},$ deci parantezele sunt nule.	4
Aceasta se reduce la $a^2 + c^2 - ab - bc = 0$ și $a^2 + b^2 - bc - ac = 0$. Prin scăderea acestor relații obținem $(b-c)(a+b+c) = 0$, de unde $b = c$. Înlocuind aceasta într-una din relațiile precedente obținem $a = b$, deci $a = b = c$.	2,5

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 10-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor Mihaela Berindeanu, G.M. 6-7-8/2025)

Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,
pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $x = y = 1$ obținem $f(1)^2 - f(1) = 2$ și cum $f(1) > 0$, rezultă $f(1) = 2$.	10p
Pentru $x \in (0, \infty)$ și $y = 1$ avem $2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}$, deci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, funcție care verifică proprietatea din enunț.	12,5p

Problema 2 (autor Flavian Georgescu)

Determinați perechile (x, y) de numere reale cu $x, y \in [20, 26]$ astfel încât
 $\max \left\{ (46x - 520)^{\log_y 45}, (46y - 520)^{\log_x 45} \right\} \leq 2025$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
(x, y) soluție $\Rightarrow (y, x)$ soluție, deci putem presupune $x \leq y$. $(y - 20)(y - 26) \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq 46y - 520 \Rightarrow y^{2\log_x 45} \leq (46y - 520)^{\log_x 45} \leq 2025$ (*)	8p
Obținem $45^{2\log_x y} \leq 45^2$, deci $\log_x y \leq 1$, de unde $y \leq x$, în consecință, $x = y$.	6,5p
Cum inegalitățile din (*) devin egalități, obținem $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025$ Avem: $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025 \Leftrightarrow 45^{\log_x (46x - 520)} = 45^2 \Leftrightarrow \log_x (46x - 520) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 = 46x - 520 \Leftrightarrow x \in \{20, 26\}$. Obținem perechile $(20, 20)$ și $(26, 26)$, care verifică.	8p

Problema 3 (autor Alina Paraschiv)

Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere complexe nenule și $a \geq 2$ un număr real cu proprietatea că $\log_a(|z_n|)$ este număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie P mulțimea submulțimilor finite și nevide ale lui $\mathbb{N}$ și funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: P \rightarrow \mathbb{C}$ cu $f(n) = \log_a(|z_n|)$ și $g(X) = \sum_{i \in X} z_i$.

Arătați că, dacă f e injectivă, atunci g e injectivă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $X, Y \in P$ cu $g(X) = g(Y)$. Presupunem $X \neq Y$, deci $X \Delta Y \neq \emptyset$, unde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Fie $k = f(j) = \max\{f(i), i \in X \Delta Y\}$. Din injectivitatea lui f, j e unic și presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $j \in X$. După eventuala reducere a termenilor cu indicii în $X \cap Y$, egalitatea $g(X) = g(Y)$ devine $z_j = \sum_{i \in Y \setminus X} z_i - \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i$ (*) ($\sum_{i \in T} z_i = 0$, dacă $T = \emptyset$)	7p
Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} = \emptyset$, atunci $z_j = 0$, fals. Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} \neq \emptyset$, atunci $k \geq 1$, și din (*) obținem $z_j \leq \left \sum_{i \in Y \setminus X} z_i \right + \left \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i \right \leq \sum_{i \in (X \Delta Y) \setminus \{j\}} z_i$	7p
Din injectivitatea lui f și $a \geq 2$ rezultă $a^k \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \leq a^k - 1$, fals, deci $X = Y$ și g e injectivă.	8,5p

Problema 4 (autor Flavian Georgescu)

Determinați numerele complexe a, b, c, d care au, simultan, proprietățile:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 1, \quad a + b + c + d = 2\sqrt{3} \quad \text{și} \quad a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cum cele patru numere au toate modulul egal cu 1 și $a^3 + b^3 = (-c)^3 + (-d)^3$, rezultă ca $a^3, b^3, (-c)^3$ și $(-d)^3$ sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi (eventual degenerat) înscris în cercul unitate.	5p
După o eventuală redenumire, rezultă $a^3 = -b^3$ și $c^3 = -d^3$. Dacă $a = -b$ obținem $2\sqrt{3} = c + d \leq c + d = 2$, fals, deci $a \neq -b$ și, analog, $c \neq -d$.	5p

După o eventuală redenumire, rezultă $a = b\varepsilon$ și $c = d\varepsilon$, unde $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Atunci $2\sqrt{3} = b\varepsilon + b + d\varepsilon + d = (1+\varepsilon)(b+d)$, deci $b+d = \sqrt{3}-i$	6p
Cum $ b+d = \sqrt{3}-i = 2 = b + d $ și $ b = d =1$, obținem $b = d = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, în consecință, $a = c = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.	6p
Deci două dintre numere sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ și două sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.	0,5p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 11-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor ***)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 3I_3 - A$ și $M_x = \frac{x}{3}B + \frac{1}{3x^2}A$, unde x este

un număr real nenul.

a) Arătați că $B^2 = 3B$.

b) Arătați că $M_x \cdot M_y = M_{xy}$, pentru orice numere reale nenule x, y .

c) Arătați că $\det(M_x) \neq 0$, pentru orice număr real nenul x .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $A^2 = 3A$, deci $B^2 = 9I_3 - 3A = 3B$,	6
b) Observăm că $AB = BA = O_3$. Rezultă astfel că $M_x M_y = \frac{xy}{9} B^2 + \frac{1}{9x^2 y^2} A^2 = \frac{xy}{3} B + \frac{1}{3(xy)^2} A = M_{xy}$	10,5
c) Observăm că $M_x \cdot M_{\frac{1}{x}} = M_1 = I_3$, deci M_x este inversabilă, oricare ar fi $x \neq 0$, ceea ce arată că $\det(M_x) \neq 0$, oricare ar fi $x \neq 0$. <i>Soluție alternativă.</i> Avem $M_x = \begin{pmatrix} x+k & k & k \\ k & x+k & k \\ k & k & x+k \end{pmatrix}$, unde $k = \frac{1}{3x^2} - \frac{x}{3}$. Atunci $\det(M_x) = (x+k)^3 + 2k^3 - 3k^2(x+k) = x^3 + 3x^2k = x^3 + x^2\left(\frac{1}{x^2} - x\right) = 1$, pentru orice $x \neq 0$	6

Problema 2 (autor ***, S.G.M 11/2025)

Arătați că relația de recurență $a_0 \in [0,1]$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definește un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și studiați limita acestuia.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru ca șirul să fie corect definit trebuie să verificăm că $a_n - a_n^2 \geq 0$, adică $a_n \in [0,1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce iese imediat cu un raționament inductiv	5

Dacă $a_0 = 0$ atunci $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, iar dacă $a_0 = 1$ atunci $a_1 = a_2 = \dots = 0$, deci $a_n \rightarrow 0$ în aceste cazuri	4
Dacă $0 < a_0 < 1$, atunci $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ și, inductiv, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \geq 1$	5
În acest ultim caz $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$, deci șirul este crescător	5
Rezultă $a_n \rightarrow \ell > 0$, $\ell = \sqrt{1 - \ell^2}$, $\ell = \frac{1}{2}$.	3,5

Problema 3 (autor *)**

Fie n un număr natural nenul și A o matrice $n \times n$ inversabilă, cu elemente numere reale și care verifică relația $A + A^{-1} = I_n$.

- Demonstrați că $A^3 = -I_n$.
- Arătați că n este un număr par.
- Determinați $\det(A + I_n)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Din ipoteză obținem $A^2 - A + I_n = O_n$, de unde $A^3 = -I_n$	6
b) Avem $4A^2 - 4A + I_n = -3I_n$, apoi $(\det(2A - I_n))^2 = (-3)^n$, deci n este par	6
c) Din punctul precedent $(\det A)^3 = (-1)^n = 1$ și, deoarece $\det A$ este număr real, reiese $\det A = 1$	3
Din ipoteză $(A + I_n)^2 = 3A$, deci $(\det(A + I_n))^2 = 3^n \det A = 3^n$	4
Cum $\det(A + I_n) = \det(A^2 + 2I_n) = \det(A + i\sqrt{2}I_n) \det(A - i\sqrt{2}I_n) \geq 0$ ca produs de două numere complexe conjugate, reiese $\det(A + I_n) = 3^{n/2}$	3,5

Problema 4 (autor *)**

a) Arătați că, dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ există, atunci această limită este nulă.

b) Dați exemplu de funcție periodică $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$ nu există. Justificați răspunsul!

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $T > 0$ o perioadă a funcției și ℓ valoarea limitei din enunț. Considerăm șirul $x_n = nT, n \in \mathbb{N}^*$; avem $x_n \rightarrow \infty$. Atunci: pe de o parte $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow \ell$, iar pe de altă parte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este constant (egal cu $f(0)$), deci $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow 0$, de unde	10

$\ell = 0$.	
b) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 - \{x\}}$; ea are perioada 1.	2,5
Pentru șirul $x_n = n, n \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; pentru șirul $y_n = n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{f(y_n)}{y_n} = \frac{n}{n - \frac{1}{n}} \rightarrow 1$, deci limita nu există.	10



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 12-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor Ștefania Constantinescu)

Se consideră un grup $(G, \cdot)$ și $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow G$ morfisme de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ în grupul $(G, \cdot)$, cu proprietatea că există două numere întregi a și b , prime între ele, astfel încât $f(a) = g(a)$ și $f(b) = g(b)$. Arătați că $f = g$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(kt) = f(t)^k$ și $g(kt) = g(t)^k$, pentru orice numere întregi k și t .	10p
Există numerele întregi p și q cu $pa + qb = 1$, deci $kpa + kqb = k$, pentru orice număr întreg k .	2,5p
$f(k) = f(kpa + kqb) = f(kpa) \cdot f(kqb) = f(a)^{kp} \cdot f(b)^{kq} = g(a)^{kp} \cdot g(b)^{kq} = g(kpa) \cdot g(kqb) = g(kpa + kqb) = g(k)$, pentru orice întreg k , deci $f = g$.	10p

Problema 2 (autor Florin Rotaru, G.M. 6-7-8/2025)

a) Fie $0 \leq a < b$ și o funcție derivabilă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$.

Arătați că există $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$.

b) Dați un exemplu de funcție derivabilă $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1)$

și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Considerăm funcția $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (a + b - x)f(x) + \int_a^x f(t) dt$. Cum $g(b) = af(b) + \int_a^b f(t) dt = af(b) + bf(a) - af(b) = bf(a) = g(a)$ și g este derivabilă, din teorema lui Rolle rezultă că există $c \in (a, b)$ cu $g'(c) = 0$.	11p

Cum $g'(x) = (a+b-x)f'(x)$, atunci $(a+b-c)f'(c) = 0$. Dar $c < b \leq a+b$, deci $f'(c) = 0$.	1,5p
b) Fie $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Avem $\int_{-1}^1 x dx = 0 = f(-1) + f(1)$ și $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [-1,1]$.	10p

Problema 3 (autor Marian Andronache)

Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu cel puțin două elemente. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$, unde e este elementul neutru al monoidului.
b) $(M, \cdot)$ este grup.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $k \geq 2$ numărul elementelor lui M . b) $\Rightarrow$ a) Cum $(M, \cdot)$ este grup, rezultă că $a^k = e$, oricare ar fi $a \in M$, deci $a^k \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$.	10p
a) $\Rightarrow$ b) Fie $a \in M$. Cum două din elementele $a, a^2, a^3, \dots, a^k, a^{k+1}$ sunt egale, există $p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $a^p = a^{p+q}$, și, inductiv, prin înmulțire cu a^q , rezultă că $a^p = a^{p+rq}$, oricare ar fi $r \in \mathbb{N}$. Alegem r astfel încât $rq > p$. Prin înmulțirea ultimei egalități cu a^{rq-p} obținem $a^{rq} = a^{2rq}$.	10p
Fie $b = a^{rq}$. Cum $b^2 = b$, rezultă $b^n = b$, deci $b = e$. Din $a^{rq} = e$ deducem că a este simetrizabil, deci $(M, \cdot)$ este grup.	2,5p

Problema 4 (autor Marian Andronache)

Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset [1, \infty)$ și șirul $(a_n)_{n \geq 2}$,

cu $a_n = \frac{1}{\ln n} \int_1^n \frac{f(x)}{x} dx$. Știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din lema lui Stolz-Cesaro, este suficient să calculăm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx$	3p

Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta_\varepsilon > 1$ astfel încât $1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$. Fie $n > \delta_\varepsilon$. Cum $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in [n, n+1]$, prin integrare de la n la $n+1$ obținem $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n) \leq \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n)$	15p
Cum $1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$, pentru orice $n \geq [\delta_\varepsilon] + 1$, rezultă că $L = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	4,5p