



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 9-a
București, 13 februarie 2026
SUBIECTE

Problema 1

Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c \leq 4$ și $ab + bc + ca \geq 4$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$.

b) Arătați că sunt adevărate cel puțin două dintre inegalitățile

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2.$$

Problema 2

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Gazeta matematică

Problema 3

Considerăm predicatul $P(k, n): k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1$, unde n și k sunt numere naturale, $k \geq 1$.

a) Arătați că propoziția $P(3, 1)$ este adevărată, iar propoziția $P(3, 2)$ este falsă.

b) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „pentru orice număr natural $k \geq 1$ există un număr natural n astfel încât propoziția $p(k, n)$ să fie falsă”.

Problema 4

Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC la BC , AC , respectiv AB .

a) Arătați că, dacă notăm cu p semiperimetrul triunghiului, atunci

$$a\overline{AD} = (p - c)\overline{AB} + (p - b)\overline{AC}.$$

b) Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \vec{0}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 10-a
București, 13 februarie 2026
SUBIECTE

Problema 1

Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,
pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Determinați perechile (x, y) de numere reale cu $x, y \in [20, 26]$ astfel încât
 $\max \left\{ (46x - 520)^{\log_y 45}, (46y - 520)^{\log_x 45} \right\} \leq 2025$.

Problema 3

Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere complexe nenule și $a \geq 2$ un număr real cu proprietatea că $\log_a(|z_n|)$ este număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie P mulțimea submulțimilor finite și nevide ale lui $\mathbb{N}$ și funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ cu $f(n) = \log_a(|z_n|)$ și $g(X) = \sum_{i \in X} z_i$.
Arătați că, dacă f e injectivă, atunci g e injectivă.

Problema 4

Determinați numerele complexe a, b, c, d care au, simultan, proprietățile:
 $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, $a + b + c + d = 2\sqrt{3}$ și $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC**

CLASA a 11-a

București, 13 februarie 2026

SUBIECTE

Problema 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 3I_3 - A$ și $M_x = \frac{x}{3}B + \frac{1}{3x^2}A$, unde x este

un număr real nenul.

- a) Arătați că $B^2 = 3B$.
- b) Arătați că $M_x \cdot M_y = M_{xy}$, pentru orice numere reale nenule x, y .
- c) Arătați că $\det(M_x) \neq 0$, pentru orice număr real nenul x .

Problema 2

Arătați că relația de recurență $a_0 \in [0, 1]$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definește un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și studiați limita acestuia.

Gazeta matematică

Problema 3

Fie n un număr natural nenul și A o matrice $n \times n$ inversabilă, cu elemente numere reale și care verifică relația $A + A^{-1} = I_n$.

- a) Demonstrați că $A^3 = -I_n$.
- b) Arătați că n este un număr par.
- c) Determinați $\det(A + I_n)$.

Problema 4

a) Arătați că, dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ există, atunci această limită este nulă.

b) Dați exemplu de funcție periodică $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$ nu există.

Justificați răspunsul!

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 12-a
București, 13 februarie 2026
SUBIECTE

Problema 1

Se consideră un grup $(G, \cdot)$ și $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow G$ morfisme de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ în grupul $(G, \cdot)$, cu proprietatea că există două numere întregi a și b , prime între ele, astfel încât $f(a) = g(a)$ și $f(b) = g(b)$. Arătați că $f = g$.

Problema 2

a) Fie $0 \leq a < b$ și o funcție derivabilă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$.

Arătați că există $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$.

b) Dați un exemplu de funcție derivabilă $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1)$

și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu cel puțin două elemente. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$, unde e este elementul neutru al monoidului.

b) $(M, \cdot)$ este grup.

Problema 4

Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset [1, \infty)$ și șirul $(a_n)_{n \geq 2}$,

cu $a_n = \frac{1}{\ln n} \int_1^n \frac{f(x)}{x} dx$. Știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.